Olympiade Francophone de Mathématiques

Sixième édition

22 mars 2025

Épreuve Junior

Problème 1. Un ensemble fini $\mathcal{S}$ de réels strictement positifs distincts est dit *radieux* s'il vérifie la propriété suivante : si a et b sont deux éléments distincts de $\mathcal{S}$, alors $a^2 + b^2$ est également un élément de $\mathcal{S}$.

1. Existe-t-il un ensemble radieux de taille supérieure ou égale à 4 ?
2. Déterminer tous les ensembles radieux de taille 2 ou 3.

Solution 1 :

Question 1 : Montrons qu'il n'existe pas d'ensembles radieux de taille supérieure ou égale à 4.

Soit $\mathcal{S}$ un ensemble radieux. Montrons que $|\mathcal{S}| \leqslant 3$, ce qui répond à la question par la négative. Notons $a_1 < \ldots < a_n$ ses éléments. Pour tout indice i, posons $A_i = \{a_i^2 + a_j^2, j \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i\}\}$. Notons qu'on a $a_i^2 + a_1^2 < \ldots < a_i^2 + a_n^2$. Ainsi, les éléments de A_i sont deux à deux distincts, donc $|A_i| = n - 1$. Or, $A_i \subset \mathcal{S}$, donc il existe au plus un élément de S n'appartenant pas à a_i.

Or, du fait des encadrements, $a_1^2 + a_n^2$ est le plus grand élément de A_1 et le plus petit élément de A_n. On déduit que

$$1 = |A_1 \cap A_n| = |A_1| + |A_n| - |A_1 \cup A_n| \geqslant 2(n-1) - n = n - 2.$$

Ainsi, $n \leqslant 3$, ce qui montre bien qu'il n'y a pas d'ensemble radieux de taille supérieure ou égale à 4.

Question 2 : Les seuls ensembles radieux de taille 2 ou 3 sont les ensembles $\mathcal{S}$ de la forme $\{a, \sqrt{a(1-a)}\}$ avec $0 < a < 1$ et $a \neq 1/2$.

Si $|\mathcal{S}| = 2$, notons a, b les deux éléments de S. On a $a^2 + b^2 \in \mathcal{S}$ donc $a^2 + b^2 = a$ ou $a^2 + b^2 = b$. Quitte à renommer a et b, on peut supposer que $a^2 + b^2 = a$. Alors $0 < b^2 = a - a^2$, ce qui implique que $0 < a < 1$. Enfin, comme $b \neq a$, on a $a \neq 2a^2$, donc $a \neq 1/2$, et S est bien de la forme donnée.

Montrons à présent qu'il n'existe pas d'ensemble radieux de taille 3.

Supposons que $|\mathcal{S}| = 3$ et notons $a_1 < a_2 < a_3$ ses éléments. Comme on a $a_1^2 + a_2^2 < a_1^2 + a_3^2 < a_2^2 + a_3^2$ et que les trois nombres sont dans S, on déduit que a_1, a_2 et a_3 vérifient le système suivant

$$\begin{cases} a_1 &= a_1^2 + a_2^2 \\ a_2 &= a_1^2 + a_3^2 \\ a_3 &= a_2^2 + a_3^2. \end{cases}$$

On déduit $a_1(1 - a_1) = a_2^2 = a_3(1 - a_3)$, ce qui conduit à

$$0 = a_1(a_1 - 1) - a_3(a_3 - 1) = a_1^2 - a_3^2 - (a_1 - a_3) = (a_1 - a_3)(a_1 + a_3) - (a_1 - a_3) = (a_1 - a_3)(a_1 + a_3 - 1).$$

Comme $a_1 \neq a_3$, on a $a_1 + a_3 = 1$ et $a_3 = 1 - a_1$. En particulier, $a_2^2 = a_1 a_3$. Ainsi,

$$a_2 = a_1^2 + a_3^2 = (a_1^2 + a_2^2)^2 + (a_2^2 + a_3^2)^2 = 2a_2^4 + a_1^4 + a_3^4 + 2a_2^2 \underbrace{(a_1^2 + a_3^2)}_{=a_2}.$$

Or, $a_1^4 + a_3^4 = (a_1^2 + a_3^2)^2 - 2a_1^2 a_3^2 = a_2^2 - 2a_2^4$. Ainsi,

$$a_2 = a_2^2 + 2a_2^3,$$

ce qui conduit à $a_2 \in \{-1, 0, 1/2\}$. Or a_2 est strictement positif donc $a_2 = 1/2$. Mais alors $a_1(1 - a_1) = 1/4$, ce qui conduit à $a_1 = 1/2 = a_2$, ce qui est absurde. Ainsi, $|\mathcal{S}| \neq 3$.

Solution 2 :

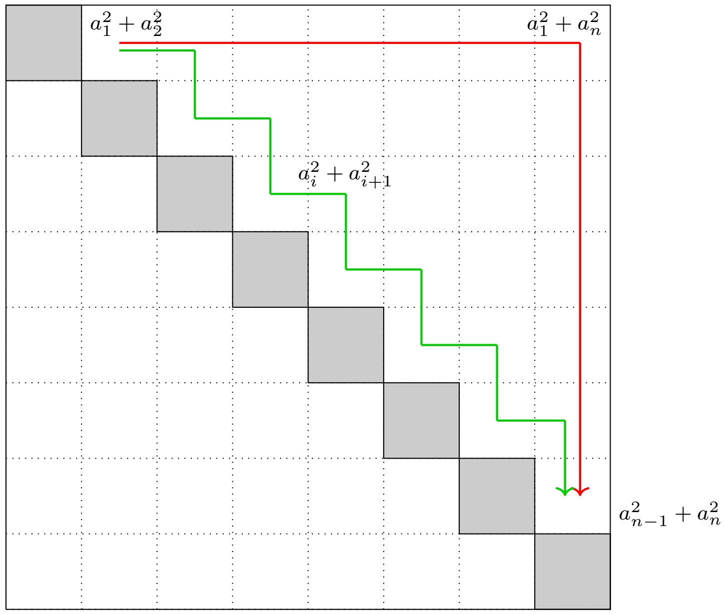
On présente une deuxième preuve de la question 1.

Notons $\mathcal{S} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ avec $a_1 < \ldots < a_n$. Une autre façon de démontrer que $n \leqslant 3$ est de remarquer la suite d'inégalités :

$$a_1^2 + a_2^2 < a_1^2 + a_3^2 < a_2^2 + a_3^2 < \ldots < a_i^2 + a_{i+1}^2 < a_i^2 + a_{i+2}^2 < a_{i+1}^2 + a_{i+2}^2 < \ldots < a_{n-1}^2 + a_n^2.$$

Les $2n - 3$ réels ci-dessus sont des éléments de $\mathcal{S}$ deux à deux distincts, ce qui implique que $2n - 3 \leqslant n$ et que $n \leqslant 3$.

Remarque : Il existe en réalité de nombreuses suites d'inégalités contenant $2n - 3$ réels de la forme $a_i^2 + a_j^2$. Plaçons les réels $a_i^2 + a_j^2$ dans un tableau $n \times n$ dans lequel la case $C_{i,j}$ située à la $i-$ème ligne et la $j-$ème colonne contient $a_i^2 + a_j^2$.



Pour tous $1 \leqslant i, j \leqslant n-1$, $a_i^2 + a_j^2 < a_{i+1}^2 + a_j^2$ et $a_i^2 + a_j^2 < a_i^2 + a_{j+1}^2$. Ainsi, si l'on trace un chemin partant de la case $C_{1,2}$, finissant à la case $C_{n-1,n}$ et dans lequel les seules directions sont vers le bas ou vers la droite, on obtient un chemin de longueur $2n-3$ qui correspond à une suite de $2n-3$ inégalités strictes. La solution 1 correspond au parcours du chemin rouge, la solution 2 au parcours du chemin vert.

Problème 2. Soit $n \geqslant 2$ un entier. On considère une grille carrée de taille $2n \times 2n$ et découpée en $4n^2$ carrés unités. La grille est dite *équilibrée* si :

- Chaque case contient un nombre valant $-1, 0$ ou 1.
- La valeur absolue de la somme des nombres de la grille ne dépasse pas $4n$.

Déterminer, en fonction de n, le plus petit entier $k \geqslant 1$ tel que toute grille équilibrée contient toujours un carré de taille $n \times n$ dont la valeur absolue de la somme des n^2 cases est inférieure ou égale à k.

Réponse : $k = n$.

Le problème contient deux parties : dans un premier temps, on montre que si k vérifie la propriété de l'énoncé, alors $k \geqslant n$. Dans un second temps, on montre que $k = n$ vérifie la propriété.

Si k vérifie la propriété, alors $k \geqslant n$.

On donne une configuration dans laquelle tout carré de taille n a une somme égale à n :

1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Considérons une grille $2n \times 2n$ dans laquelle on inscrit un 1 dans chaque case de la ligne 1 et dans chaque case de la ligne $n+1$. La somme des cases de la grille vaut $4n$ et si l'on choisit un carré quelconque de taille $n \times n$, il intersecte soit la ligne 1 soit la ligne $n+1$, mais pas les deux. La somme des cases de tout carré de taille $n \times n$ est donc exactement n. Ainsi $k \geqslant n$.

Olympiade Francophone de Mathématiques

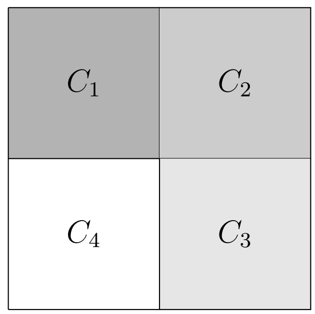
Sixième édition

22 mars 2025

$k = n$ **vérifie la propriété.**

Dans la suite, on dira qu'un carré est *positif* si la somme de ses cases est supérieure strictement à n et qu'il est *négatif* si la somme de ses cases est strictement inférieure à $-n$. Dans la suite, on suppose par l'absurde que l'énoncé est faux. Les carrés $n \times n$ de la table sont donc tous positifs ou négatifs.

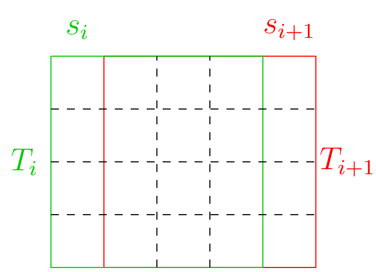
On découpe le carré $2n \times 2n$ en quatre carrés de taille $n \times n$ disjoints.



Notons C_1, C_2, C_3 et C_4 les quatre carrés obtenus. On suppose, quitte à inverser les signes de toutes les cases, que C_1 est positif. On note T_i le carré formé par les n premières lignes et les colonnes dont le numéro va de i à $i+n-1$ (on a donc $T_1 = C_1$ et $T_n = C_2$). On montre par récurrence sur i que T_i est positif pour tout i.

<u>Initialisation :</u> $T_1 = C_1$ est positif.

<u>Hérédité :</u> On suppose que T_i est positif, avec $i \geqslant 1$ fixé.



Notons s_i la somme des cases de la colonne appartenant au carré T_i mais pas au carré T_{i+1} (ces cases sont sur la $i-$ème colonne du carré) et s_{i+1} la somme des cases de la colonne appartenant au carré T_{i+1} mais pas au carré T_i (ces cases sont sur la $i+n-1-$ème colonne du carré). Notons aussi S_i la somme des cases de T_i et S_{i+1} la somme des cases de T_{i+1}. Puisque les cases sont de valeur absolue inférieure à 1, on a

$$|S_{i+1} - S_i| = |s_{i+1} - s_i| \leqslant 2n.$$

Comme T_i est positif, $S_i > n$. On déduit par inégalité triangulaire que $S_{i+1} \geqslant S_i - 2n > -n$. Donc T_{i+1} n'est pas négatif et T_{i+1} est positif, ce qui achève la récurrence.

On déduit que C_2 est également positif. De la même façon, on déduit que si C_2 est positif alors C_3 est positif et que si C_3 est positif alors C_4 est positif. Donc C_1, C_2, C_3 et C_4 sont tous les quatre positifs. Mais alors la somme des cases est supérieure à $4(n+1) > 4n$, ce qui contredit l'énoncé, d'où la conclusion.

Remarque : D'autres configurations sont possibles pour la construction, telles que

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0

1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
0	0	0	0	0	0	0	0

Olympiade Francophone de Mathématiques

Sixième édition

22 mars 2025

Problème 3. Soit ABC un triangle, Ω son cercle circonscrit et O le centre de Ω. Soit P un point appartenant au segment $[BC]$. On note Q le second point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles AOB et APC.

Montrer que la droite (PQ) et la tangente à Ω au point A se coupent sur le cercle circonscrit au triangle AOB.

Olympiade Francophone de Mathématiques

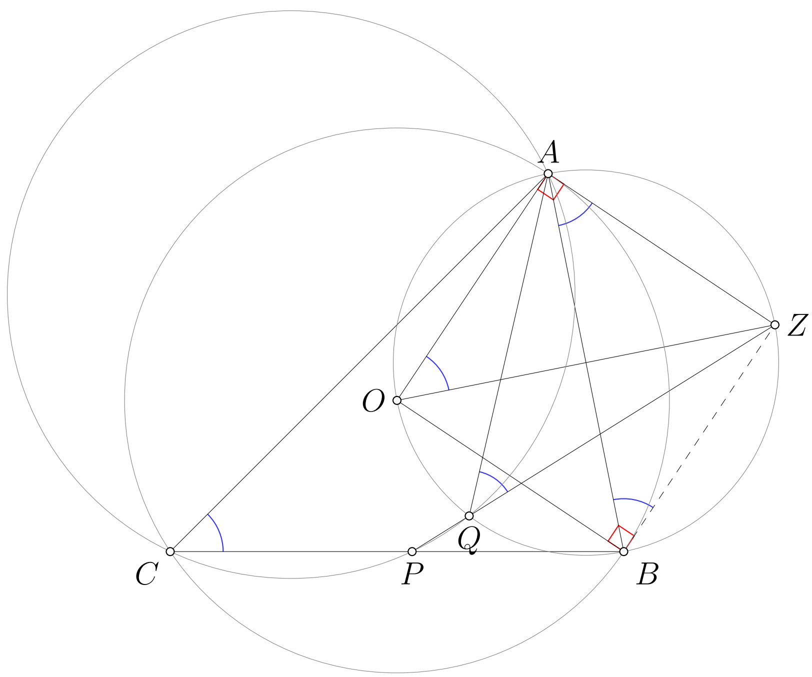
Sixième édition

22 mars 2025

Problème 3. Soit ABC un triangle, Ω son cercle circonscrit et O le centre de Ω. Soit P un point appartenant au segment $[BC]$. On note Q le second point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles AOB et APC.

Montrer que la droite (PQ) et la tangente à Ω au point A se coupent sur le cercle circonscrit au triangle AOB.

Solution 1 :



Soit Z la deuxième intersection de la tangente à Ω en A avec le cercle circonscrit au triangle AOB. Montrons d'abord que $\widehat{ZBA} = \widehat{BAZ}$. On a $\widehat{OAZ} = 90°$, donc $[OZ]$ est un diamètre du cercle circonscrit au triangle AOB. Comme de plus $OA = OB$, ces points sont symétriques par rapport à (OZ), de sorte que $AZ = BZ$, ce qui donne l'égalité d'angles voulue. On a alors par chasse aux angles

$$\widehat{AQZ} = \widehat{ABZ} = \widehat{ACB} = 180° - \widehat{PQA}.$$

On déduit que $\widehat{PQZ} = 180°$ et les points P, Q et Z sont alignés.

Solution 2 :

Si on définit Z comme le second point d'intersection de la droite (PQ) avec le cercle circonscrit au triangle ABC, on trouve d'après le théorème de l'angle inscrit et le théorème de l'angle au centre :

$$\widehat{AOZ} = \widehat{AQZ} = 180° - \widehat{AQP} = \widehat{ACB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}.$$

Ainsi, (OZ) est la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$. Comme le triangle AOB est isocèle en O, cette droite est également la médiatrice du segment $[AB]$. Le segment $[OZ]$ est donc un diamètre du cercle circonscrit au triangle AOB, ce qui implique que $\widehat{OAZ} = 90°$ et que (AZ) est tangente au cercle Ω en A.

Solution 3 :

Dans cette solution, on définit Z comme le second point d'intersection de la tangente à Ω en A avec le cercle circonscrit au triangle AOB.

Une fois que l'on a établi que A et B sont symétriques par rapport à $[OZ]$ comme dans la solution 1, on déduit que $\widehat{AOZ} = \widehat{ZOB}$. On a alors par le théorème de l'angle au centre

$$\widehat{AQZ} = \widehat{AOZ} = \frac{1}{2}\widehat{BOA} = \widehat{BCA} = 180° - \widehat{CQA},$$

ce qui permet à nouveau de conclure.

Solution 4 :

On définit à nouveau Z comme le second point d'intersection de la tangente à Ω en A avec le cercle circonscrit au triangle AOB.

On peut aussi calculer directement l'angle $\widehat{AQZ}$, sans passer par le fait que les points A et B sont symétriques par rapport à (OZ).

Puisque $[OZ]$ est un diamètre du cercle circonscrit au triangle AOB, on a $\widehat{ZQO} = 90°$. Puisque $AQPC$ est cyclique, $\widehat{AQP} = 180° - \widehat{ACB}$. Enfin, puisque $AOBQ$ est cyclique, $\widehat{OQA} = \widehat{OBA}$. Or, le triangle OBA étant isocèle, on a d'après le théorème de l'angle au centre,

$$\widehat{OBA} = \frac{1}{2}(180° - \widehat{BOA}) = 90° - \widehat{ACB}.$$

On trouve donc en combinant

$$\widehat{PQZ} = \widehat{PQA} + \widehat{OQZ} - \widehat{OQA} = 180° - \widehat{ACB} + 90° - (90° - \widehat{ACB}) = 180°.$$

Problème 4. Charlotte écrit au tableau les entiers $1, \ldots, 2025$. Charlotte dispose de deux opérations, l'opération *PGCD* et l'opération *PPCM*. L'opération *PGCD* consiste à choisir deux entiers a et b écrits au tableau, à les effacer et à écrire l'entier $\text{PGCD}(a, b)$. L'opération *PPCM* consiste à choisir deux entiers a et b écrits au tableau, à les effacer et à écrire l'entier $\text{PPCM}(a, b)$. Un entier N est dit *gagnant* s'il existe une suite d'opérations à l'issue desquelles le seul entier encore écrit au tableau est l'entier N.

Déterminer tous les entiers gagnants parmi $\{1, \ldots, 2025\}$ et donner, pour chacun d'eux, le nombre minimum d'opérations *PGCD* que Charlotte doit utiliser.

Le nombre PGCD(a, b) désigne le plus grand commun diviseur de a et b, tandis que le nombre PPCM(a, b) désigne le plus petit commun multiple de a et b.

Solution :

Montrons que, quel que soit l'entier $N \in \{1, \ldots, 2025\}$, Charlotte peut se débrouiller pour que le dernier entier écrit au tableau soit l'entier N.

Notons $(i, j) \to \text{PGCD}(i, j)$ le fait de remplacer i et j par leur pgcd et $(i, j) \to \text{PPCM}(i, j)$ celle de les remplacer par leur PPCM.

Notons qu'à chaque opération, le nombre d'entiers écrits au tableau diminue d'exactement 1, si bien qu'au bout de 2024 opérations, il ne reste plus qu'un seul entier. Charlotte va proécéder de la façon suivante : à chaque opération, elle choisit, tant qu'elle le peut, un entier a distinct de N et de 1, et applique l'opération $(1, a) \to \text{PGCD}(1, a) = 1$. Cette opération revient à effacer l'entier a des nombres écrits au tableau. Ainsi, lorsque Charlotte ne peut plus effectuer cette opération, cela signifie que les seuls entiers écrits au tableau sont 1 et N. Elle applique alors l'opération $(1, N) \to \text{PPCM}(1, N) = N$, à l'issue de laquelle le seul entier encore écrit au tableau est N.

Montrons à présent que Charlotte peut toujours se débrouiller pour écrire l'entier N en utilisant une seule fois l'action PGCD.

D'une part, étant donné que $\text{PPCM}(a, b, c) = \text{PPCM}(a, \text{PPCM}(b, c))$ pour tous a, b, c, si Charlotte n'utilise que l'action PPCM, le dernier nombre écrit au tableau sera $\text{PPCM}(1, 2, \ldots, 2025)$ qui vérifie

$$\text{PPCM}(1, 2, \ldots, 2025) \geqslant 2025 \times 2024 > N.$$

Ainsi, Charlotte doit utiliser au moins une fois l'action PGCD.

D'autre part, Charlotte peut effectuer la suite d'actions suivantes : tant qu'elle le peut, Charlotte choisit deux entiers a et b distincts de 1 et N et effectue l'opération $(a, b) \to \text{PPCM}(a, b)$. Lorsqu'elle ne peut plus effectuer cette opération, cela signifie qu'il reste au tableau uniquement les entiers $1, N$ et un certain entier a. Charlotte effectue alors $(1, a) \to \text{PGCD}(1, a) = 1$ et $(1, N) \to \text{PPCM}(1, N) = N$.

Ainsi, seule une opération du type PGCD suffit.